

Aula no 27

Curso de Física 1
Berkeley, vol 2
página 289

Equações de Maxwell

SI

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho / \epsilon_0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \end{cases}$$

CGS

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi \rho \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{J} \end{cases}$$

1. Introdução

Examinando novamente a

a

lei de

Jawon

na forma diferencial

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi \rho(\vec{r}, t)$$

CGS (1.a)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} =$$

em unidades gaussianas ou

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r}, t)$$

SI

(1.b)

no S.T.

As equações (1a)-(1b) valem para cargas

em repouso ou em movimento lembrando também

que carga é conservada como é evidente de

Eq. da continuidade

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = - \frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t}$$

(2)

2. Algo está faltando?

No caso em que a densidade de

corrente $\vec{J}$ e' estacionária ($\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$)

) , o campo magnético e' dado pela

lei de Ampère :

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}$$

(CGS)

(3.a)

em unidades gaussianas ou

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

(SI)

(3.b)

Vamos assumir a partir de agora que distribuições de carga e campos são dependentes do tempo. Evidentemente se $\rho = \rho(\vec{r}, t)$, significa que (ver Eq. (2)) que $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} \neq 0$. Mas se tomarmos o divergente nas Eqs. (3):

$$\begin{aligned} \frac{4\pi}{c} \vec{\nabla} \cdot \vec{J} &= \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) && \text{(CGS)} \\ \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{J} &= \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) && \text{(SI)} \end{aligned} \quad (4)$$

Olhando em detalhe o lado direito da Eq. (4):

4.

$$\nabla \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial y} B_z - \frac{\partial}{\partial z} B_y \right) \hat{x} + \left(\frac{\partial}{\partial z} B_x - \frac{\partial}{\partial x} B_z \right) \hat{y} + \left(\frac{\partial}{\partial x} B_y - \frac{\partial}{\partial y} B_x \right) \hat{z}$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \cancel{\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} B_z} - \cancel{\frac{\partial^2}{\partial x \partial z} B_y} + \cancel{\frac{\partial^2}{\partial y \partial z} B_x} - \cancel{\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} B_z} + \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} B_y - \frac{\partial^2}{\partial z \partial y} B_x \quad (5)$$

Como $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i}$, ficamos com

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = 0 \quad ! \quad (6)$$

O resultado obtido na Eq. (6)

está em contradição (ver Eq. (2)) com

$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} \neq 0$ conclusão: algo está

mal na Eq. (3).

Na verdade, o que

está faltando ^{é exatamente} algo na Eq. (3) que

permita resolver a contradição. Em

outras palavras, essa Eq. deveria ser
reesrita como:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{J} + (?) \quad \text{(CGS)} \quad (7)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + (?) \quad \text{SI}$$

Lembrando que

$$E_x' = E_x \quad ; \quad E_y' = \gamma (E_y - \beta B_z) \quad ; \quad E_z' = \gamma (E_z + \beta B_y) \quad (2.a)$$

$$B_x' = B_x \quad ; \quad B_y' = \gamma (B_y + \beta E_z) \quad ; \quad B_z' = \gamma (B_z - \beta E_y) \quad (2.b)$$

As equações de transformação dos campos elétricos e magnéticos sugerem a ideia de simetria entre esses campos. Mas podemos explorar ^{+ ainda} essa ideia de simetria. Na lei de

Faraday

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{CGS}) \quad (9)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{SI})$$

Então, por simetria

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (\text{CGS}) \quad (10)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (\text{SI})$$

Isso indica que a Eq. (7) pode

ser completada da seguinte maneira:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (\text{CGS}) \quad (11)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (\text{SI})$$

Para testar, tomamos o divergente em ambos os lados da Eq. (11). Então

$$0 = \frac{4\pi}{c} \vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{1}{c} \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \text{CGS}$$

$$0 = \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \text{SI}$$

ou

$$0 = \frac{4\pi}{c} \vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{c} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \right] \quad (\text{CGS}) \quad (12)$$

$$0 = \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t} [\mu_0 \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E}] \quad \text{SI}$$

Mas pela lei de Gauss

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi \rho.$$

$$(\text{CGS}) \quad \text{ou} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho / \epsilon_0 \quad (\text{SI})$$

$$0 = \frac{4\pi}{c} \vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{4\pi}{c} \rho \right] \quad (\text{CGS}) \quad (13)$$

$$0 = \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \mu_0 \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (\text{SI})$$

na Eq. (13) mais precisamente a identidade da de continuidade é satisfeito pela Eq. de continuidade

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = - \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

consistente c/ a Eq. de continuidade

que ^{expressa} exatamente a conservação de

carga. Em outras palavras, o termo adicional na Eq. (11), resolve a contradição mencionada na pag. 5.

3. Corrente de deslocamento

Poderíamos na verdade escrever

$$\vec{J}_d \equiv \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (\text{CGS}) \quad (14)$$

$$\vec{J}_d \equiv \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$\vec{J}_d$ é uma densidade de corrente de

deslocamento.

Essa forma a Eq. (11) torna-se

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} (\vec{J} + \vec{J}_d) \quad (\text{CGS})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 (\vec{J} + \vec{J}_d) \quad (\text{SI})$$

Isto permite interpretar esse termo adicional como um novo efeito de indução, onde um campo elétrico (variável no tempo) induz um campo magnético.

4. Equações de Maxwell (CGS)

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (15)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{J} \quad (16)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi \rho \quad (17)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (18)$$

No espaço vazio (SI fonte)

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (19)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (20)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad (21)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (22)$$

Eqs. de Maxwell (SI)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (23)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (24)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (25)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (26)$$

No caso em que ρ e $\vec{J}$ são nulos

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad (27)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (29)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (28)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (30)$$

Outra situação aparece se estamos

tratando com materiais que são sujeitos

à polarização e/ou magnetização. No caso

de polarização, sabemos ^{do caso estático} que aparece uma

densidade de cargas "ligadas"

$$\rho_b = - \vec{\nabla} \cdot \vec{P} \quad (31)$$

De maneira similar, no caso da magnetização aparece uma densidade de corrente ligada

ver página 265 Griffiths

$$\vec{J}_b = \vec{\nabla} \times \vec{M} \quad (32)$$

Mas no caso não estático qualquer mudança na polarização implica num fluxo de carga ligada que pode ser associado a uma densidade de corrente $\vec{J}_p$, isto é:

$$\vec{J}_p = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \quad (33)$$

Obtendo $\vec{J}_p$ não tem relação nenhuma com $\vec{J}_b$ que, por sua vez, envolve spin e movimento orbital dos elétrons. Se

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_p = \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \quad (34)$$

Mas pela Eq. (31), a Eq. (34) pode ser reescrita como:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_p = -\frac{\partial \rho_b}{\partial t} \quad (35)$$

que satisfaz a eq. de continuidade

Dessa maneira, no caso de materiais magnéticos, a densidade de carga total

$$\rho = \rho_f + \rho_b = \rho_f - \vec{\nabla} \cdot \vec{P} \quad (36)$$

enquanto a densidade de corrente

$$\vec{J} = \vec{J}_f + \vec{J}_b + \vec{J}_p = \vec{J}_f + \vec{\nabla} \times \vec{M} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \quad (37)$$

então a lei de Gauss se modifica substituindo a Eq. (31) na Eq. (28):

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \left(\rho_f - \vec{\nabla} \cdot \vec{P} \right) \quad (38)$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho_f \quad (39)$$

Introduzindo o vetor de deslocamento

$$\vec{D} \equiv \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \quad (40)$$

a lei de Gauss pode finalmente ser escrita como

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_f \quad (41)$$

Como no caso estático !

Por outro lado, a Lei de Ampère pode ser obtida substituindo a Eq. (37)

na Eq. (26):

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J}_f + \vec{\nabla} \times \vec{M} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \right) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (42)$$

$$\vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} \right) = \vec{J}_f + \frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \right) \quad (43)$$

Introduzindo o vetor $\vec{H}$

$$\vec{H} \equiv \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} \quad (44)$$

e utilizando a definição do vetor deslocamento $\vec{D}$, a Eq. (33) torna-se

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_f + \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} \quad (45)$$

Em termos de cargas e correntes livres, as eqs. de Maxwell podem finalmente ser agrupadas como

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_f \quad (46)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (47)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (48)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (49)$$

Em meios lineares

$$\vec{D} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E} \quad (50)$$

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \quad (51)$$

De tal maneira que (ver Eq. (40))

$$\vec{D} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E} = \epsilon \vec{E} \quad (42)$$

onde

$$\epsilon = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \quad (43)$$

De forma similar (ver Eq. (44))

$$\chi_m \vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{H} \quad (44)$$

ou

$$(1 + \chi_m) \vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B}$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \frac{1}{(1 + \chi_m)} \vec{B} = \frac{1}{\mu} \vec{B} \quad (45)$$

onde

$$\mu = \mu_0 (1 + \chi_m) \quad (46)$$